Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Минцаев Магомед Шавалович
Должность: Ректор
Дата подписания: 13.10.2023 12:42:17
Уникальный программный ключ:
236bcc35c296f119d6aafdc22836b21db52dbc07971a86865a5825f9fa4304cc

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ГРОЗНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА М.Д. МИЛЛИОНЩИКОВА

Кафедра «Информационные технологии»

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Лабораторный практикум

Квалификация
Магистр

Грозный 2021

Тема: «Принятие решений для нелинейных распределительных задач»

Целью является выявление особенностей постановки нелинейных распределительных задач, приобретение навыков их решения методом динамического программирования.

Для демонстрации метода динамического программирования сформулируем классическую задачу об оптимальном распределении некоторого объема работ между имеющимися видами оборудования.

Пусть необходимо выполнить объем работ V = 4 усл. ед. В распоряжении имеются N = 4 вида оборудования. Зависимость эксплуатационных затрат оборудования *i*-го вида от объема работ x_i обозначим через $Y_i(x_i)$ и представим в виде следующей таблицы:

Вид оборудования	Затраты $Y_i(x_i)$ при объеме работ x = 1,2, 3 или 4			
	1	2	3	4
1	10	25	36	46
2	10	22	30	34
3	4	15	25	33
4	8	17	23	28

В данной задаче в качестве ограничения примем $\sum_{i=1}^{n} x_i = 4, x_i \geq 0$. Используя метод динамического программирования, необходимо минимизировать целевую функцию: $Y = \sum Y_i(x_i) \rightarrow min$.

Обозначим через $f_N(x)$ величину минимальных затрат при оптимальном распределении объема работ x по N видам оборудования. Если $x = 0$, то $f_N(0) = 0$, где $N = 1, 2,\ldots$ (при нулевом объеме работ оборудование не работает, поэтому затраты тоже равны 0). При $N = 1$ и при любом объеме работ x справедливо $f_1(x) = Y_1(x)$. В общем случае

$$f_N(x) = \min\left[Y_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)\right], \quad 0 \leq x_N \leq x \leq V. \quad (2)$$

Чтобы проиллюстрировать метод динамического программирования, выполним все необходимые итерации.

1. Пусть весь объем работ x выполняется только первым видом оборудования. Тогда $f_1(x) = Y_1(x)$, $x = x_1 = 1, 2, 3$ или 4. Поэтому вычисления по формуле (2) можно не производить.

2. Пусть теперь объем работ x выполняется первым и вторым видами оборудования.

Тогда $f_2(x) = min\ [Y_2(x_2) + f_1(x - x_2)]$, $x = x_1 + x_2$.

Результаты расчетов сведем в следующую таблицу:

x	1		2			3				4				
x_2	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
$Y_2(x_2)$	0	10	0	10	22	0	10	22	30	0	10	22	30	34
$f_1(x\text{-}x_2)$	10	0	25	10	0	36	25	10	0	46	36	25	10	0
Y_2+f_1	10	10	25	20	22	36	35	32	30	46	46	47	40	34
$f_2(x)$	***10***		***20***			***30***				***34***				

3. Пусть теперь объем работ x выполняется первым, вторым и третьим видами оборудования.

Тогда $f_3(x) = min\,[Y_3(x_3) + f_2(x - x_3)]$, $x = x_1 + x_2 + x_3$.

Результаты расчетов сведем в следующую таблицу:

x	1		2			3				4				
x_3	0	1^+	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
$Y_3(x_3)$	0	4	0	4	15	0	4	15	25	0	4	15	25	33
$f_2(x-x_3)$	10	0	20	10	0	30	20	10	0	34	30	20	10	0
Y_3+f_2	10	4	20	14	15	30	24	25	25	34	34	35	35	33
$f_3(x)$	***4***		***14***			***24***				***33***				

4. Пусть теперь объем работ x выполняется всеми четырьмя видами оборудования.

Тогда $f_4(x) = min\,[Y_4(x_4) + f_3(x - x_4)]$, $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Результаты расчетов сведем в таблицу:

x	1		2			3				4				
x_4	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3^+	4
$Y_4(x_4)$	0	8	0	8	17	0	8	17	23	0	8	17	23	28
$f_3(x-x_4)$	4	0	14	4	0	24	14	4	0	33	24	14	4	0
Y_4+f_3	4	8	14	12	17	24	22	21	23	33	32	31	**27**	28
$f_4(x)$	***4***		***12***			***21***				***27***				

Итак, минимальное значение суммарных затрат равно ***27***. Определим, как распределяется объем работ $V = 4$ по $N = 4$ видам оборудования.

Для этого отметим знаком «+» соответствующий столбец в последней таблице при $x = 4$. Он определяет объем работ, распределяемых 4-му виду оборудования, и равен $x_4 = 3$. Вычисляем оставшийся объем работ: $x = V - x_4 = 4 - 3 = 1$. Отметим знаком «+» соответствующий столбец в предыдущей таблице в зоне, где $x = 1$. Он определяет объем работ, который выполняется третьим видом оборудования: $x_3 = 1$. Поскольку оставшийся объем $V - x_4 - x_3 = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$, иначе анализ таблиц необходимо было бы продолжить.

Таким образом, оптимальное распределение работ для данной задачи имеет вид: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

В случае решения задачи максимизации целевой функции в формуле (2) необходимо заменить минимум на максимум, без изменения алгоритма.

Тема: «Принятие решений для задач упорядочения»

Целью является выявление особенностей постановки задач упорядочения, приобретение навыков их решения по алгоритму Джонсона.

Для демонстрации работы алгоритма Джонсона решим следующую задачу упорядочения:

Имеется программа для сжатия данных (архиватор), которая включает два метода для кодирования и сжатия данных – *MTF* (Move To Front) и *LZSS* (Лемпеля–Зива). Каждый метод реализован в виде нити (thread), поэтому оба алгоритма могут выполняться квазипараллельно на одноядерном процессоре и параллельно на двуядерном. Архиватору поручено сжать 7 файлов. Причем обработка каждого файла сначала должна быть выполнена с помощью алгоритма *MTF*, а затем *LZSS*. Требуется определить такой порядок обработки файлов, при котором суммарное время обработки будет минимальным, если исходя из размеров каждого файла известны апостериорные оценки продолжительности обработки файлов каждым из методов:

j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
t_{1j}	5	4	8	9	3	7	4
t_{2j}	3	5	5	7	4	6	7

Используя алгоритм Джонсона, обрабатываем исходные данные и получаем следующий порядок обработки файлов: 5-7-2-4-6-3-1. В соответствии с полученным порядком, делаем перестановки столбцов и получаем следующую таблицу:

j	**5**	**7**	**2**	**4**	**6**	**3**	**1**
t_{1j}	3	4	4	9	7	8	5

t_{2j}	4	7	5	7	6	5	3

Изобразим время обработки файлов графически (рис. 10) в соответствии с найденным оптимальным порядком их обработки.

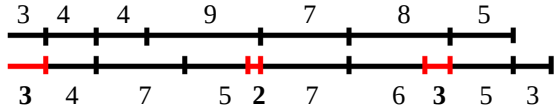

Рис. 10. Временная диаграмма обработки файлов

Минимальное общее время обработки составляет 45 единиц. К достоинствам алгоритма Джонсона можно отнести возможность нахождения оптимальной последовательности обработки за один проход алгоритма, а многовариантность перестановок (при совпадении минимальных элементов) в конечном счете не оказывает влияния на значение целевой функции. В сравнении с алгоритмами Гомори, ветвей и границ или динамическим программированием алгоритм Джонсона имеет заметное преимущество во времени нахождения оптимальной последовательности, однако область его применения ограничена двумя машинами.

Тема: «Решение игровых задач геометрическим методом»

Целью является выявление особенностей постановки игровых задач, приобретение навыков их решения геометрическим методом.

Задача 1. Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	4	3	2	6
x_2	2	2	3	–1

В игре нет седловой точки (нижняя чистая цена игры $\alpha = 2$, верхняя чистая цена игры $\beta = 3$). Дублирующих стратегий нет, стратегия 2-го игрока y_2 доминирует над стратегией y_1, однако упрощать матрицу путем исключения доминируемой стратегии не будем.

Решение данной игры геометрическим методом сводится к решению игры 2×2 на основании доказанного утверждения о том, что в любой конечной игре существует решение, в котором количество активных стратегий каждого игрока не превосходит числа $\min(m, n)$. Найдем это решение.

1. Поиск оптимальной стратегии начнем с игрока, у которого две стратегии. Это 1-й игрок. На оси абсцисс откладываем отрезок единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 1-го игрока x_1, правый – x_2.

2. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если 2-й игрок применяет свои чистые стратегии y_1, y_2, y_3 и y_4.

3. Точки с координатами $q_{11}= 4$ и $q_{21}= 2$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через y_1 y_1. Любая точка на этом отрезке прямой равна среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет некоторую смешанную стратегию $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, а 2-й игрок отвечает своей чистой стратегией y_1. Аналогично строим прямые y_2 y_2,

$y_3\,y_3$, $y_4\,y_4$ через точки с координатами соответственно $q_{12} = 3$ и $q_{22} = 2$, $q_{13} = 2$ и $q_{23} = 3$, $q_{14} = 6$ и $q_{24} = -1$. Получим график, состоящий из четырех прямых соответствующих смешанным стратегиям 1-го игрока, при условии, что 2-й игрок отвечает чистыми стратегиями y_1, y_2, y_3, y_4 (рис. 1).

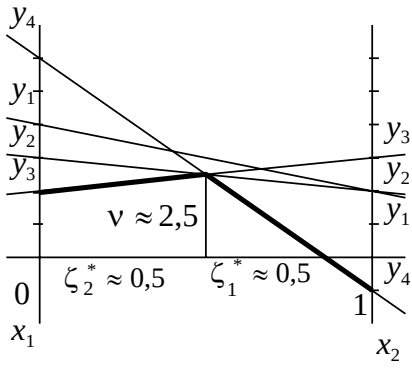

Рис. 1. График для определения цены игры и оптимальной стратегии 1-го игрока

4. Найдем на графике нижнюю огибающую (на рис. 1 она выделена жирной ломаной линией), а на ней – «пиковую» точку максимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Его высота будет соответствовать цене игры $\boldsymbol{\nu \approx 2{,}5}$. Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\boldsymbol{\xi^*_1 \approx 0{,}5}$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\boldsymbol{\xi^*_2 \approx 0{,}5}$.

5. Существует такая оптимальная стратегия 2-го игрока, у которой из четырех стратегий только две являются активными. На графике (рис. 1) в точке максимума пересеклись три прямых (y_2, y_3 и y_4), выбираем любую пару прямых с противоположными наклонами, например y_3 и y_4.

6. Для того чтобы найти оптимальную стратегию 2-го игрока $\boldsymbol{\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2, \eta^*_3, \eta^*_4)} = (0, 0, \boldsymbol{\eta^*_3, \eta^*_4})$, построим новый график по шагам, аналогичным пп. 1–4. На оси абсцисс откладываем отрезок

единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 2-го игрока y_3, правый – y_4. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он применяет свои чистые стратегии x_1 и x_2. Точки с координатами $q_{13} = 2$ и $q_{14} = 6$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через x_1x_1. Аналогично, строим прямую $x_2\ x_2$ через точки с координатами соответственно $q_{23} = 3$ и $q_{24} = -1$. Получим график, представленный на рис. 2. Найдем на нём верхнюю огибающую (она выделена на рис. 2 жирной ломаной линией), а на ней – «пиковую» точку минимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Цена игры ранее уже была найдена ($v \approx 2{,}5$). Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\eta^*_3 \approx 0{,}9$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\eta^*_4 \approx 0{,}1$.

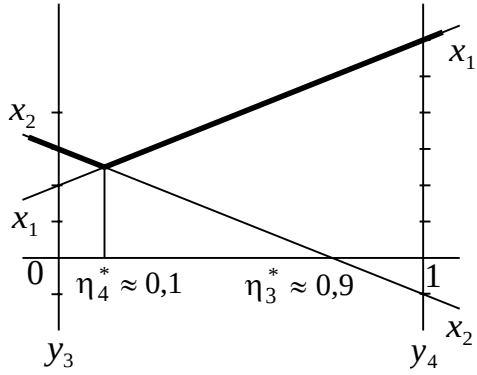

Рис.2. График для определения оптимальной стратегии 2-го игрока

Ответ: цена игры $v \approx 2{,}5$; оптимальная стратегия 1-го игрока $\xi^* = (\xi^*_1, \xi^*_2) \approx (0{,}5\ ; 0{,}5)$; оптимальная стратегия 2-го игрока $\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2, \eta^*_3, \eta^*_4) \approx (0; 0; 0{,}9\ ; 0{,}1)$.

Задача 2. Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2
x_1	–5	6
x_2	7	3
x_3	1	5
x_4	10	2

1. Поиск оптимальной стратегии начнем с игрока, у которого две стратегии. Это 2-й игрок. На оси абсцисс откладываем отрезок единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 2-го игрока y_1, правый – y_2.

2. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он применяет свои чистые стратегии x_1, x_2, x_3 и x_4.

3. Точки с координатами $q_{11} = -5$ и $q_{12} = 6$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через x_1x_1. Любая точка на этом отрезке прямой равна среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет свою чистую стратегию x_1, а 2-й игрок отвечает некоторой смешанной стратегией $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. Аналогично строим прямые x_2x_2, x_3x_3, x_4x_4 через точки с координатами соответственно $q_{21} = 7$ и $q_{22} = 3$, $q_{31} = 1$ и $q_{32} = 5$, $q_{41} = 10$ и $q_{42} = 2$. График, состоящий из четырех прямых, соответствующих смешанным стратегиям 2-го игрока, при условии, что 1-й игрок отвечает чистыми стратегиями x_1, x_2, x_3, x_4, представлен на рис. 3.

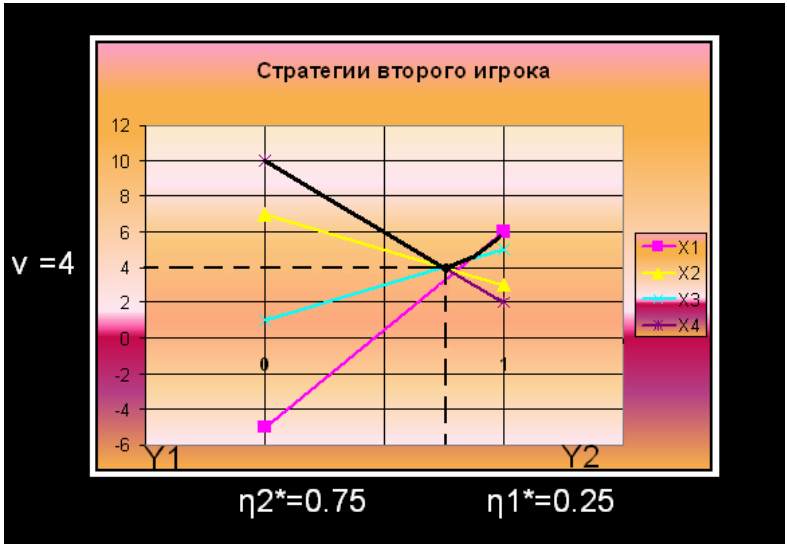

Рис. 3. График для определения цены игры и оптимальной стратегии 2-го игрока

4. Найдем на графике верхнюю огибающую, а на ней – «пиковую» точку минимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Его высота будет соответствовать цене игры $v \approx 4$. Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\eta^*_1 \approx 0{,}25$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\eta^*_2 \approx 0{,}75$.

5. Существует такая оптимальная стратегия 1-го игрока, у которой из четырех стратегий только две являются активными. На графике в точке минимума пересеклись две прямых (x_3 и x_4).

6. Для того чтобы найти оптимальную стратегию 1-го игрока $\xi^* = (\xi^*_1, \xi^*_2, \xi^*_3, \xi^*_4) = (0, 0, \xi^*_3, \xi^*_4)$, построим новый график по шагам, аналогичным пп. 1–4. На оси абсцисс откладываем отрезок единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 1-го игрока x_3, правый – x_4. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он

применяет свои чистые стратегии x_3 и x_4. Точки с координатами $q_{31} = 1$ и $q_{41} = 10$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через y_1y_1. Аналогично строим прямую y_2 y_2 через точки с координатами соответственно $q_{32} = 5$ и $q_{42} = 2$. Получим график, представленный на рис. 4.

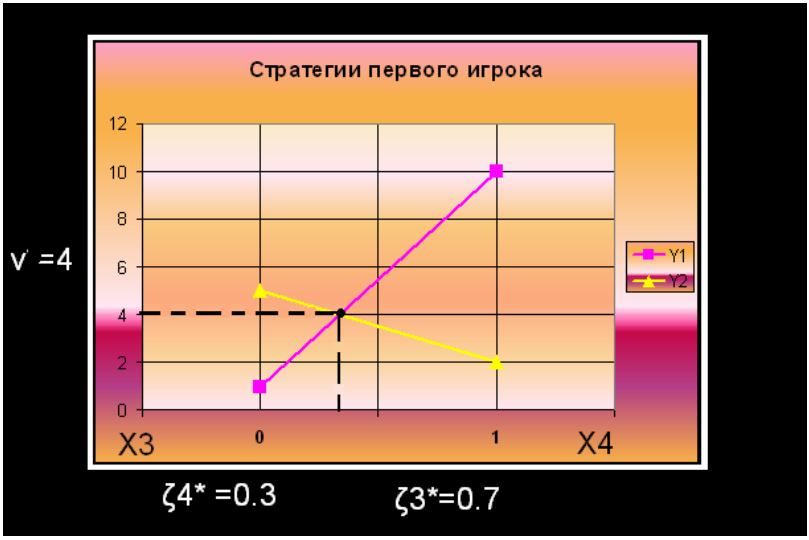

Рис. 4. График для определения оптимальной стратегии 1-го игрока

Найдем на графике нижнюю огибающую, а на ней – «пиковую» точку максимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Цена игры ранее уже была найдена ($v \approx 4$). Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\xi^*_3 \approx 0{,}7$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\xi^*_4 \approx 0{,}3$.

Ответ: цена игры $v \approx 4$; оптимальная стратегия 1-го игрока $\xi^* = (\xi^*_1, \xi^*_2, \xi^*_3, \xi^*_4) \approx (0; 0; 0{,}7; 0{,}3)$; оптимальная стратегия 2-го игрока $\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2) \approx (0{,}25; 0{,}75)$.

Тема: «Решение игровых задач методом последовательных приближений»

Целью является выявление особенностей постановки игровых задач, приобретение навыков решения матричных игр $m \times n$ методом последовательных приближений.

Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	2	0
x_2	−1	−2	3
x_3	2	0	−1

В игре нет седловой точки ($\alpha = 0$, $\beta = 2$), нет также доминирующих стратегий. Имитируем многократное повторение игры, построив итерационный процесс взаимного обучения игроков. Каждый шаг в этом процесс – это партия, которая включает ход 1-го игрока и ответ 2-го игрока. Игроки выбирают в очередной партии такую чистую стратегию, которая является наилучшей с учетом всех предыдущих ходов противника, рассматриваемых как некоторая «смешанная» стратегия. Иными словами, 1-й игрок выбирает стратегию, которая дает максимальный средний выигрыш, а 2-й игрок – минимальный средний выигрыш. После каждой партии будем вычислять среднее значение выигрыша 1-го игрока, проигрыша 2-го игрока, а также среднее арифметическое этих величин.

Для удобства результаты вычислений по методу последовательных приближений будем представлять в табличном виде:

N	**i**(N)	$\mathbf{L}_1$(N)	$\mathbf{L}_2$(N)	$\mathbf{L}_3$(N)	**v**$_\wedge$(N)	**j**(N)	$\mathbf{U}_1$(N)	$\mathbf{U}_2$(N)	$\mathbf{U}_3$(N)	**v**^(N)	**v**

В таблице приняты следующие обозначения столбцов: N – номер партии; **i**(N) – номер чистой стратегии 1-го игрока, выбранной в партии N; $\mathbf{L}_j$(N) – общий выигрыш 1-го игрока после N

партий, если 2-й игрок все время применяет стратегию $\mathbf{y_j}$; $\mathbf{v^{\wedge}}(N) = \mathbf{min_j}$ $(\mathbf{L_j}(N))/N$ – наименьший средний выигрыш 1-го игрока за N ходов; $\mathbf{j}(N)$ – номер чистой стратегии 2-го игрока в партии N; $\mathbf{U_i}(N)$ – общий выигрыш 1-го игрока после N партий, если он все время использует стратегию $\mathbf{x_i}$; $\mathbf{v^{\wedge}}(N) = \mathbf{max_i}$ $(\mathbf{U_i}(N))/N$ – наибольший средний выигрыш 1-го игрока за N ходов; $\mathbf{v} = (\mathbf{v_{\wedge}} + \mathbf{v^{\wedge}})/2$ – приближенное значение цены игры.

В первой партии у 1-го игрока ещё нет никакой информации, поэтому он выбирает свою стратегию произвольно. Пусть это будет стратегия $\boldsymbol{x_1}$. Таблица примет следующий вид:

N	**i**(N)	$\mathbf{L_1}(N)$	$\mathbf{L_2}(N)$	$\mathbf{L_3}(N)$	$\mathbf{v_{\wedge}}(N)$	**j**(N)	$\mathbf{U_1}(N)$	$\mathbf{U_2}(N)$	$\mathbf{U_3}(N)$	$\mathbf{v^{\wedge}}(N)$	**v**
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	2	**0**	0						

Ответный ход 2-го игрока должен быть таким, чтобы выигрыш 1-го игрока был минимален. Это стратегия $\boldsymbol{y_3}$. Тогда наибольший средний выигрыш 1-го игрока за один ход будет равен 3, а приближенное значение цены игры $\mathbf{v} = (\mathbf{v_{\wedge}} + \mathbf{v^{\wedge}})/2 = (0+3)/2 = 1{,}5$:

N	**i**(N)	$\mathbf{L_1}(N)$	$\mathbf{L_2}(N)$	$\mathbf{L_3}(N)$	$\mathbf{v_{\wedge}}(N)$	**j**(N)	$\mathbf{U_1}(N)$	$\mathbf{U_2}(N)$	$\mathbf{U_3}(N)$	$\mathbf{v^{\wedge}}(N)$	**v**
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	2	**0**	0	$\boldsymbol{y_3}$	0	**3**	–1	3	1,5

Ответный ход 1-го игрока должен обеспечивать ему максимальный средний выигрыш. Это стратегия $\boldsymbol{x_2}$. В этом случае общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если 2-й игрок применяет стратегию $\boldsymbol{y_1}$, будет равен $\mathbf{L_1}(2) = 1 - 1 = 0$; общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если 2-й игрок применяет стратегию $\boldsymbol{y_2}$, будет равен $\mathbf{L_2}(2) = 2 - 2 = 0$; общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если 2-й игрок применяет стратегию $\boldsymbol{y_3}$, будет равен $\mathbf{L_3}(2) = 0+3 = 3$. Наименьший средний выигрыш 1-го игрока за две партии $\mathbf{v_{\wedge}}(N)$ будет равен $\min(\mathbf{L_1}(2), \mathbf{L_2}(2), \mathbf{L_3}(2))/2 = 0/2 = 0$. Он определяет наиболее выгодную ответную стратегию 2-го игрока – $\boldsymbol{y_1}$ или $\boldsymbol{y_2}$. Выбираем в качестве ответной стратегии 2-го игрока стратегию $\boldsymbol{y_1}$:

N	**i**(N)	L_1(N)	L_2(N)	L_3(N)	$v_\wedge$(N)	**j**(N)	U_1(N)	U_2(N)	U_3(N)	$v^\wedge$(N)	**v**
1	x_1	1	2	**0**	0	y_3	0	**3**	–1	3	1,5
2	x_2	0	0	3	0	y_1					

В этом случае общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если он все время применяет стратегию x_1, будет равен $U_1(2) = 0+1 = 1$; если 1-й игрок применяет стратегию x_2, то $U_2(2) = 3 – 1 = 2$; если 1-й игрок применяет стратегию x_3, то $U_3(2) = – 1+2 = 1$. Очевидно, что наибольший средний выигрыш 1-го игрока за две партии $v^\wedge(2)$ будет равен $\max(U_1(2), U_2(2), U_3(2))/2 = 2/2 = 1$. Он определяет наиболее выгодную ответную стратегию 1-го игрока в следующей партии – x_2 и позволяет найти приближенное значение цены игры $v = (v_\wedge + v^\wedge)/2 = (0+1)/2 = 0,5$:

N	**i**(N)	L_1(N)	L_2(N)	L_3(N)	$v_\wedge$(N)	**j**(N)	U_1(N)	U_2(N)	U_3(N)	$v^\wedge$(N)	**v**
1	x_1	1	2	**0**	0	y_3	0	**3**	–1	3	1,5
2	x_2	0	0	3	0	y_1	1	**2**	1	1	0,5

Аналогично рассуждая, приведем в таблице результаты ещё для 17-ти партий:

3	x_2	–1	–**2**	6	-2/3	y_2	**3**	0	1	1	0,17
4	x_1	**0**	0	6	0	y_1	**4**	–1	3	1	0,5
5	x_1	**1**	2	6	1/5	y_1	**5**	–2	5	1	0,6
6	x_1	**2**	4	6	1/3	y_1	6	–3	**7**	7/6	0,75
7	x_3	**4**	4	5	4/7	y_1	7	–4	**9**	9/7	0,93
8	x_3	6	**4**	4	1/2	y_2	**9**	–6	9	9/8	0,8
9	x_1	7	6	**4**	4/9	y_3	**9**	–3	8	1	0,72
10	x_1	8	8	**4**	2/5	y_3	**9**	0	7	0,9	0,65
11	x_1	9	10	**4**	4/11	y_3	**9**	3	6	9/11	0,6
12	x_1	10	12	**4**	1/3	y_3	**9**	6	5	3/4	0,54
13	x_1	11	14	**4**	4/13	y_3	**9**	9	4	9/13	0,5

14	x_1	12	16	**4**	2/7	y_3	9	**12**	3	6/7	0,57
15	x_2	11	14	**7**	7/15	y_3	9	**15**	2	1	0,73
16	x_2	**10**	12	10	5/8	y_1	10	**14**	4	7/8	0,75
17	x_2	**9**	10	13	9/17	y_1	11	**13**	6	13/17	**0,65**

На графике (рис. 1) в качестве примера представлен процесс «колебания» цены игры на 17-ти итерациях по методу последовательных приближений.

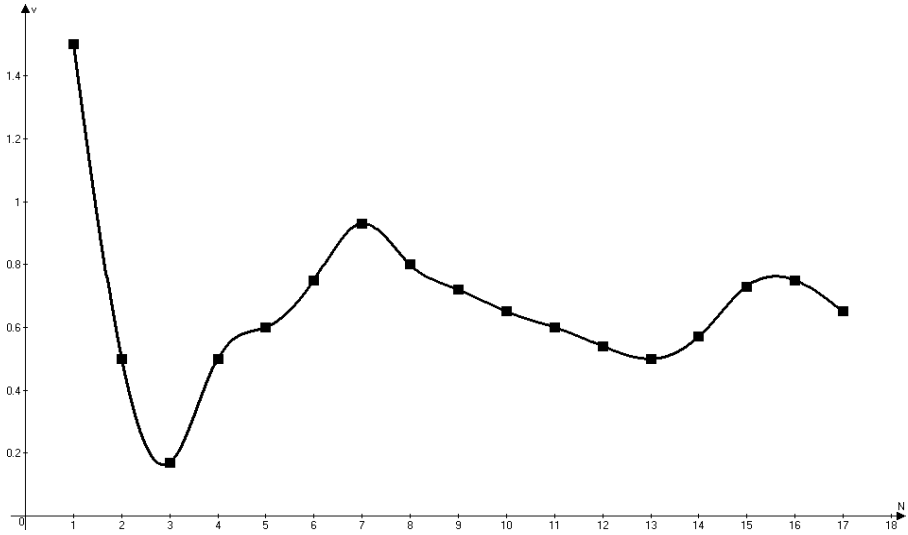

Рис. 1.Процесс «колебания» цены игры по методу последовательных приближений

Ответ: цена игры $\boldsymbol{v} \approx 0{,}65$; оптимальные стратегии игроков $\boldsymbol{\xi^*} = (\boldsymbol{\xi^*_1}, \boldsymbol{\xi^*_2}, \boldsymbol{\xi^*_3}) \approx (10/17, 5/17, 2/17)$; $\boldsymbol{\eta^*} = (\boldsymbol{\eta^*_1}, \boldsymbol{\eta^*_2}, \boldsymbol{\eta^*_3}) \approx (7/17, 2/17, 8/17)$.

Тема: «Решение игровых задач симплекс-методом»

Целью является выявление особенностей постановки игровых задач, приобретение навыков решения путем сведения игры к паре двойственных задач линейного программирования с последующим применением симплекс-метода.

Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3
x_1	0	1	2
x_2	–1	0	3
x_3	2	–3	0

Найти решение игры путем сведения ее к задаче ЛП.

Седловая точка в данной игре отсутствует ($\alpha = -1$, $\beta = 1$), доминирующих стратегий нет. В матрице имеются отрицательные элементы, поэтому прибавляем ко всем элементам матрицы число 3, это увеличит на 3 цену игры (цена игры $\boldsymbol{\nu}^*$ с положительными элементами матрицы не может быть отрицательной), но не повлияет на оптимальные стратегии игроков. Получим новую матрицу игры:

	y_1	y_2	y_3
x_1	3	4	5
x_2	2	3	6
x_3	5	0	3

Построим прямую задачу ЛП. Согласно теореме, оптимальная стратегия 1-го игрока $\boldsymbol{\xi}^*$ гарантирует ему выигрыш не меньше $\boldsymbol{\nu}^*$, независимо от стратегии, выбранной 2-м игроком:

$$3\xi_1+2\xi_2+5\xi_3 \geq \nu,$$

$$4\xi_1+3\xi_2 \geq \nu,$$

$$5\xi_1+6\xi_2+3\xi_3 \geq \nu,$$

где $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$; $\xi_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Преобразуем полученную систему, разделив ее на положительное число $\boldsymbol{\nu}$. Введем новое обозначение: $\boldsymbol{p_i} = \boldsymbol{\xi_i} / \boldsymbol{\nu}$, i=1, 2, 3. Получим

$$\mathbf{3}p_1 + \mathbf{2}p_2 + \mathbf{5}p_3 - \mathbf{1} \geq 0,$$

$$\mathbf{3}p_1 + \mathbf{2}p_2 + \mathbf{5}p_3 - \mathbf{1} \geq 0,$$

$$\mathbf{3}p_1 + \mathbf{2}p_2 + \mathbf{5}p_3 - \mathbf{1} \geq 0,$$

причем $\mathbf{p_i} \geq 0$, а поскольку 1-й игрок стремится максимизировать цену игры $\boldsymbol{v}$, то величина, обратная $1/\boldsymbol{v}$, будет минимизироваться:

$$\mathbf{P_{min} = p_1 + p_2 + p_3}.$$

Отсюда оптимальные стратегии игроков и цену игры можно определить, решив, например, симплекс-методом прямую задачу ЛП.

Симплекс-таблица для рассматриваемого примера, приведенная к канонической форме (независимые и зависимые переменные неотрицательные, целевая функция максимизируется), имеет следующий вид:

	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	$\mathbf{p_3}$	**1**
$\mathbf{z_1}$	3	2	5	–1
$\mathbf{z_2}$	4	3	0	–1
$\mathbf{z_3}$	**1**	6	3	–1
$\mathbf{P}_{min}$	–1	–1	–1	**0**

В приведенной к каноническому виду симплекс-таблице знаки в строке целевой функции $\mathbf{P}_{min}$ изменены на обратные (в канонической задаче целевая функция максимизируется), значение функции равно 0 (правый нижний элемент таблицы), столбец свободных членов в ограничениях-неравенствах обозначен через **1**.

Поскольку 2-й игрок стремится минимизировать свой проигрыш, то величина, обратная $1/\boldsymbol{v}$, будет стремиться к максимуму. Отсюда оптимальная стратегия 2-го игрока определяется из обратной задачи линейного программирования следующего вида: максимизировать функцию $\boldsymbol{Z_{max}} = \boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2} + \ldots + \boldsymbol{z_n} = 1/\mathbf{v}$ при указанных ограничениях.

Таким образом, решение матричной игры сведено к решению пары двойственных задач линейного программирования.

Найдем *допустимое* (опорное) решение. Признаком того, что допустимое решение найдено, является неотрицательность столбца свободных членов (**1**). Воспользуемся известным из симплекс-метода критерием выбора *разрешающего элемента*:

$$max\{\,|\,b_j / a_{ij}\,|\,\},$$

где b_j – элементы столбца свободных членов (b_j<0), a_{ij} – элементы симплекс-таблицы (a_{ij} >0). Для полученной симплекс-таблицы разрешающим элементом будет элемент a_{31}. Делаем шаг *жорданова исключения* с разрешающим элементом a_{31}. Получим новую симплекс-таблицу в виде следующей матрицы:

	$\mathbf{z}_3$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_3$	**1**
$\mathbf{z}_1$	3	**–16**	–4	2
$\mathbf{z}_2$	4	–21	–12	3
$\mathbf{p}_1$	1	–6	–3	1
$\mathbf{P}_{\min}$	–1	5	2	**–1**

Найдено допустимое решение, поскольку в симплекс-таблице выполняется соответствующий признак – неотрицательность столбца свободных членов (**1**).

Найдем *оптимальное* решение. Признаком того, что оптимальное решение найдено, является выполнение условия: неположительность элементов строки целевой функции ($\mathbf{P}_{\min}$). Воспользуемся известным из симплекс-метода критерием выбора *разрешающего элемента* при поиске оптимального решения:

$$min\{\,|\,b_j / a_{ij}\,|\,\},$$

где b_j >0, a_{ij} <0.

Для полученной симплекс-таблицы разрешающим элементом будет элемент a_{12}. Делаем шаг *жорданова исключения* с разрешающим элементом a_{12}. Получим новую симплекс-таблицу в виде следующей матрицы:

	z_3	z_1	p_3	**1**
p_2	3/16	–1/16	–4/16	2/16
z_2	1/16	21/16	**–27/4**	6/16
p_1	–2/16	6/16	–24/16	4/16
P_{min}	–1/16	–5/16	12/16	**–6/16**

Признак оптимальности для полученной матрицы не выполняется. Вновь определяем разрешающий элемент (a_{23}) и делаем шаг жорданова исключения. Получим новую симплекс-таблицу:

	z_3	z_1	z_2	**1**
p_2	5/27	–1/9	1/27	1/9
p_3	1/108	7/36	–4/27	1/18
p_1	–5/36	1/12	2/9	1/6
P_{min}	–1/18	–1/6	–1/9	**–1/3**

Признак оптимальности (неположительность элементов строки целевой функции) выполняется. Получено оптимальное решение одновременно прямой и двойственной задачи ЛП.

Вернемся к исходной игровой задаче, выполнив необходимые замены переменных и определив цену игры и оптимальные стратегии игроков.

Элемент в правом нижнем углу полученной таблицы равен **–1/3**. Следовательно, цена игры $\nu = 1/P_{min} = 1/Z_{max} = -3$. Однако, поскольку в приведенной к каноническому виду таблице инвертировались знаки в строке целевой функции, то $\nu = 3$.

Тогда оптимальная стратегия 1-го игрока определяется из следующих соотношений: $\xi^*_1 = \nu \times p_1 = 3 \times 1/6 = 1/2$, $\xi^*_2 = \nu \times p_2 = 3 \times 1/9 = 1/3$, $\xi^*_3 = \nu \times p_3 = 3 \times 1/18 = 1/6$.

Оптимальная стратегия 2-го игрока также определяется из полученной симплекс-таблицы: $\eta^*_1 = \nu \times z_1 = 3 \times 1/6 = 1/2$, $\eta^*_2 = \nu \times z_2 = 3 \times 1/9 = 1/3$, $z_3 = 3 \times 1/18 = 1/6$.

Ко всем элементам исходной игровой матрицы ранее прибавлялось число 3. Это не повлияло на оптимальность стратегий игроков, но изменило цену игры в исходной задаче. Поэтому окончательное значение цены игры **v*** равно **v – 3 = 0**.

Ответ: цена игры **v*= 0**; оптимальная стратегия 1-го игрока ***ξ*= (ξ*₁ , ξ*₂ , ξ*₃) = (1/2, 1/3, 1/6)***; оптимальная стратегия 2-го игрока ***η*= (η*₁ , η*₂ , η*₃) = (1/2, 1/3, 1/6)***.

Тема: «Решение статистических игр»

Целью является приобретение навыков решения статистических игр ЛПР с «природой» в условиях неопределенности, используя различные критерии принятия решения.

Машину (станок, технологическую установку, конвейер и т.п.) требуется подвергнуть проверке с приостановкой ее эксплуатации и выпуска продукции. Вовремя не обнаруженная неисправность может привести к капитальной поломке машины.

У ЛПР имеется три варианта решения:

E₁ – полная проверка; ***E₂*** – минимальная проверка; ***E₃*** – отказ от проверки.

Машина может находиться в следующих состояниях:

F₁ – исправна; ***F₂*** – незначительная неисправность; ***F₃*** – серьезная неисправность.

Необходимо найти оптимальное решение ЛПР по ***MM***-, ***S***-, ***HW***-, ***P***-, ***BL***-, ***HL***-, ***G***-критериям.

Предположим, что экспертно удалось оценить возможные результаты и представить их в виде матрицы выигрыша ЛПР (результаты включают затраты на проверку машины, ремонт, недополученную продукцию и т.п.).

Эта матрица выигрыша ЛПР и результаты поиска оптимального решения по ***MM***-критерию представлены в виде следующей таблицы:

	F₁	**F₂**	**F₃**	$Z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}$

E_1	–20	–22	–25	***–25***
E_2	–14	–23	–31	–31
E_3	0	–24	–40	–40

Из таблицы видно, что для получения оптимального решения ЛПР по критерию ***MM*** исходная матрица выигрышей ***E*** дополняется столбцом, состоящим из минимальных элементов каждой строки, далее среди них выбирается максимальный элемент. Соответствующее решение является оптимальным по ***MM***-критерию. В данном случае это решение $\mathbf{E_1}$. Оно полностью исключает риск.

Найдем оптимальное решение по ***S***-критерию Сэвиджа. Он так же, как ***MM***-критерий, используется в условиях полной неопределенности. ***S***-критерий отражает позицию относительного пессимизма, поскольку рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется при наихудшем состоянии природы. Для оценки решения по ***S***-критерию вначале вычислим величину потерь, т.е. от исходной матрицы $\boldsymbol{E=(e_{ij})}$ переходим к матрице недополученного выигрыша $\boldsymbol{R=(r_{ij})}$, а затем используем минимаксную функцию и правило выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$Z_S = \min\limits_i \max\limits_j (\max\limits_i e_{ij} - e_{ij})$
$\mathbf{E_1}$	–20	–22	–25	20	0	0	20
$\mathbf{E_2}$	–14	–23	–31	14	1	6	**14**
$\mathbf{E_3}$	0	–24	–40	0	2	15	15

Оптимальным по ***S***-критерию является решение $\mathbf{E_2}$.

Найдем оптимальное решение по ***HW***-критерию Гурвица. Это компромиссный критерий пессимизма-оптимизма. Для его применения необходимо задать значение λ – весовой множитель Гурвица. Пусть $\lambda = 0{,}5$. Для оценки решения по ***HW***-критерию необходимо воспользоваться правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\lambda \min\limits_j e_{ij}$	$(1-\lambda)\max\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i [\lambda \min\limits_j e_{ij} + (1-\lambda)\max\limits_j e_{ij}]$

E_1	–20	-22	-25	–12,5	–10	–22,5
E_2	–14	-23	-31	–15,5	–7	–22,5
E_3	0	-24	-40	–20	0	**–20**

Оптимальным по ***HW***-критерию является решение E_3. Однако при $\lambda > 0{,}57$ оптимальным по Гурвицу становится решение E_2.

Найдем оптимальное решение по ***P***-критерию произведений. Он применим только для матриц выигрыша с *положительными* значениями элементов. Поскольку в исходной таблице элементы матрицы выигрыша являются неположительными, то для применения Р-критерия необходимо вначале прибавить ко всем элементам матрицы некоторое достаточно большое положительное число c. Рассмотрим два варианта: $c = 41$ и $c = 200$. Для оценки решения по ***P***-критерию необходимо воспользоваться правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	$Z_{P(c=41)} = \max \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$	$Z_{P(c=200)} = \max \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$
E_1	–20	–22	-25	21	16	16	***6 384***	5 607 000
E_2	–14	–23	-31	27	18	10	4 860	5 563 818
E_3	0	–24	-40	41	17	1	697	**5 632 000**

Из таблицы ***P***-критерия следует, что принимаемое решение зависит от величины константы (c), которая прибавляется ко всем элементам исходной матрицы с целью выполнения условия $e_{ij} > 0$. При $c = 41$ оптимальным будет решение E_1, при $c = 200$ – E_3.

Найдем оптимальное решение по ***BL***-критерию Байеса–Лапласа, который используют в условиях *частичной* неопределенности и котрый основан на поиске решения, дающего максимальный средний выигрыш при априорно известных вероятностях состояний природы q_j. Пусть состояния природы F_1, F_2, F_3 равновероятны: $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$. Для оценки решения по ***BL***-критерию воспользуемся правилом выбора

решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$Z_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, q1 = q2 = q3 = 1/3$
$\mathbf{E_1}$	–20	–22	–25	–22,33
$\mathbf{E_2}$	–14	–23	–31	–33,67
$\mathbf{E_3}$	0	–24	–40	***–21,33***

Согласно ***BL***-критерию оптимальным будет решение $\mathbf{E_3}$ – отказ от проверки.

Найдем оптимальное решение по ***HL***-критерию Ходжа–Лемана, который используют в условиях частичной неопределенности. Он опирается одновременно на критерии ***BL*** и ***MM*** путем введения некоторого параметра $0 \le \nu \le 1$, выражающего степень доверия к используемому распределению вероятностей q_j. Если это доверие велико, то акцент делается на ***BL***-критерий, иначе – на ***MM***-критерий. Пусть $\nu = 0{,}5$, а состояния природы F_1, F_2, F_3 равновероятны: $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$. Для оценки решения воспользуемся правилом выбора решения по ***HL***-критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$Z_{HL} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right]; \nu = 0{,}5; qi = 1/3$
$\mathbf{E_1}$	-20	-22	-25	***–23,67***
$\mathbf{E_2}$	-14	-23	-31	–26,84
$\mathbf{E_3}$	0	-24	-40	–30,76

Согласно ***HL***-критерию оптимальным будет решение $\mathbf{E_1}$ – полная проверка машины. При степени доверия $\nu > 0{,}94$ оптимальным будет другое решение.

Найдем оптимальное решение по ***G*-**критерию Гермейера, который также рекомендуется использовать в условиях частичной неопределенности при оценке потерь ЛПР (элементы матрицы выигрышей $e_{ij} < 0$). Критерий ориентирован на поиск решений, которые не считаются заведомо худшими, чем другие. Пусть состояния природы F_1, F_2, F_3 равновероятны: $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$. Оценим решения по ***G*-**критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	F₁	**F₂**	**F₃**	$Z_G = \max_i \min_j e_{ij} q_j \quad , q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$
E₁	–20	–22	–25	***–8,33***
E₂	–14	–23	–31	–10,33
E₃	0	–24	–40	–13,44

Согласно ***G*-**критерию оптимальным будет решение **E₁** – полная проверка машины.

Анализ решений, полученных по всем критериям, показывает, что критерии не дают единогласного решения:

- решение E_2 не выгодно с различных точек зрения, его рекомендуют только ***S***- и ***HW***-критерии (при $\lambda > 0{,}57$);
- решение E_1 рекомендуют ***MM***-, ***P***-, ***HL***- и ***G***-критерии;
- решение E_3 рекомендуют ***HW***-, ***P***-, ***BL***- и ***HL***-критерии.

Если число реализаций решения невелико, то более надежным будет решение E_1.

Тема: «Принятие решений в задаче о назначениях»

Целью является приобретение навыков постановки и решения задачи о назначении, используя различные критерии принятия решения.

Компания имеет 8 сбытовых баз (Б1, Б2,…, Б8) и 8 заказов, которые необходимо доставить потребителям (П1, П2,…, П8). Складские помещения каждой из баз достаточны для размещения

любого из этих заказов. Известна стоимость доставки заказов с каждой базы:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	68	72	75	83	84	86	92	91
Б2	56	60	58	63	64	61	55	59
Б3	38	40	35	45	38	38	43	39
Б4	47	42	40	45	48	43	41	46
Б5	84	79	88	90	77	79	78	80
Б6	22	33	45	47	30	40	48	47
Б7	44	52	63	49	16	55	59	63
Б8	77	78	89	84	75	74	85	90

Необходимо найти такое назначение, распределив заказы по базам, чтобы суммарная стоимость выполнения всех заказов была минимальной, при условии, что одна база выполняет один заказ, а один заказ выполняется одной базой.

Применим венгерский метод для решения поставленной задачи.

Если в исходной задаче о назначении целевую функцию необходимо максимизировать, то для того чтобы воспользоваться венгерским методом, целесообразно преобразовать исходную матрицу о назначении. Например, найти максимальный элемент матрицы и вычесть из него все остальные элементы матрицы. В данной задаче целевую функцию необходимо минимизировать, поэтому перейдем к непосредственному выполнению итераций венгерского метода.

1. Получим нули в каждой строке и столбце исходной матрицы путем вычитания минимальных элементов. Вначале определим минимальные элементы в каждой строке матрицы и разность между текущим элементом строки и ее минимальным элементом. Затем определим минимальные элементы в каждом столбце полученной матрицы и разность между текущим элементом столбца и ее минимальным элементом. Получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	0	2	7	10	16	18	24	20
Б2	1	3	3	3	9	6	0	1
Б3	3	3	0	5	3	3	8	1
Б4	7	0	0	0	8	3	1	3
Б5	7	0	11	8	0	2	1	0
Б6	0	9	23	20	8	18	26	22
Б7	28	34	47	28	0	39	43	44
Б8	3	2	15	5	1	0	11	13

2. Приступаем к поиску оптимального решения. Для этого выберем в полученной матрице строку с наименьшим количеством нулей. Пометим знаком «+» один из нулей этой строки, а знаком «–» отметим все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль. Повторяем эту процедуру для остальных строк, пока есть неотмеченные нули. В результате получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	**+0**	2	7	10	16	18	24	20
Б2	1	3	3	3	9	6	**+0**	1
Б3	3	3	**+0**	5	3	3	8	1
Б4	7	**+0**	–0	–0	8	3	1	3
Б5	7	–0	11	8	–0	2	1	**+0**
Б6	–0	9	23	20	8	18	26	22
Б7	28	34	47	28	**+0**	39	43	44
Б8	3	2	15	5	1	**+0**	11	13

Подсчитываем в полученной матрице число нулей со знаком «+». Оно равно 7, т.е. назначение не является полным (число нулей со знаком «+» не равно 8), поэтому переходим к п. 3 венгерского алгоритма.

3. Определим минимальный набор строк и столбцов, содержащих все нули. Для этого необходимо отметить знаком "+":

а) все строки, в которых нет ни одного отмеченного знаком "+" нуля;

б) все столбцы, содержащие нуль со знаком "–", хотя бы в одной из отмеченных знаком "+" строк;

в) все строки, содержащие отмеченные знаком "+" нули, хотя бы в одном из отмеченных знаком "+" столбцов.

г) действия б) и в) повторять поочередно до тех пор, пока есть что отмечать.

В итоге получим следующую матрицу:

Б/П	**+П1**	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
+Б1	**+0**	2	7	10	16	18	24	20
Б2	1	3	3	3	9	6	**+0**	1
Б3	3	3	**+0**	5	3	3	8	1
Б4	7	**+0**	–0	–0	8	3	1	3
Б5	7	–0	11	8	–0	2	1	**+0**
+Б6	–0	9	23	20	8	18	26	22
+Б7	28	34	47	28	**+0**	39	43	44
Б8	3	2	15	5	1	**+0**	11	13

Минимальный набор строк и столбцов, содержащих все нули, образуют все непомеченные знаком "+" строки и помеченные знаком "+" столбцы. Все входящие в этот набор строки и столбцы, необходимо мысленно вычеркнуть. В задаче знаком «+» помечены строки Б1 и Б6, а также столбец П1. Соответственно, необходимо мысленно вычеркнуть 2–5-ю и 7–8-ю строки, а также 1-й столбец (выделены цветом).

4. Выбрать среди оставшихся элементов матрицы минимальный элемент, затем вычесть его из каждого элемента невычеркнутых столбцов и прибавить его к каждому элементу вычеркнутых строк. Выполняя указанные действия, получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	0	0	5	8	14	16	22	18
Б2	3	3	3	3	9	6	0	1
Б3	5	3	0	5	3	3	8	1
Б4	9	0	0	0	8	3	1	3
Б5	9	0	11	8	0	2	1	0
Б6	0	7	21	18	6	16	24	20
Б7	30	34	47	28	0	39	43	44
Б8	5	2	15	5	1	0	11	13

5. Вновь приступаем к поиску оптимального решения. Для этого выберем в полученной матрице строку с наименьшим количеством нулей. Отметим знаком «+» один из нулей этой строки, а все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль, отметим знаком «–». Повторяем эту процедуру для остальных строк, пока есть неотмеченные нули. В результате получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	–0	**+0**	5	8	14	16	22	18
Б2	3	3	3	3	9	6	**+0**	1
Б3	5	3	**+0**	5	3	3	8	1
Б4	9	–0	–0	**+0**	8	3	1	3
Б5	9	–0	11	8	–0	2	1	**+0**
Б6	**+0**	7	21	18	6	16	24	20
Б7	30	34	47	28	**+0**	39	43	44
Б8	5	2	15	5	1	**+0**	11	13

Подсчитываем в полученной матрице число нулей со знаком «+». Оно равно 8, т.е. назначение является полным. Получено оптимальное решение исходной задачи о назначении: {x_{12}, x_{27}, x_{33}, x_{44},

$x_{58}, x_{61}, x_{75}, x_{86}$}, целевая функция $Y_{min}=72 + 55 + 35 + 45 + 80 + 22 + 16 + 74 = 399$ единиц стоимости.

Тема: «Принятие решений в многокритериальных задачах планирования»

*Целью я*вляется приобретение навыков постановки и решения задач сетевого планирования и управления, а также задач стратегического планирования по методу анализа иерархий (лекция 18).

Задача 1. При планировании некоторого проекта был составлен список операций, подлежащих выполнению, установлены оценки их продолжительности и определены операции, непосредственно предшествующие той или иной операции (столбцы 1–3):

Операция	Продолжительность	Непосредственно предшествующие	Непосредственно следующие	Вес
1	2	3	4	5
A	1	–	B,N	6
B	4	A, C, D	I	2
C	1	–	B, H, K	10
D	1	–	B, F, N	12
E	2	–	F	6
F	3	D, E	G,P	5
G	4	F	I	2
H	1	C	L,M	4
I	5	B, G, N	–	1
K	2	C	–	1
L	2	H	–	1
M	2	H	–	1
N	4	A,D	I	2
P	2	F	–	1
Q	6	–	R	2
R	3	Q	–	1

Очевиден недостаток такого рода таблиц – порядок следования операций в них носит случайный характер, неясно, какие операции более важные, какие должны непосредственно следовать после завершения данной операции и т.п. Упорядочим операции по важности, вычислив вес каждой операции наиболее простым способом.

Вначале заполним столбец 4 таблицы, указывая для каждой операции непосредственно следующие за ней операции путем просмотра столбца 3. Будем считать вес операции равным сумме числа непосредственно следующих за ней операций и весов этих операций. Вес конечных операций, которые не имеют списка непосредственно следующих операций, равен единице. Заполнение столбца 5 таблицы проводится путем просмотра столбца 4 снизу вверх, возможно, несколько раз.

Далее операции выстраиваются в порядке невозрастания их весов, и можно приступать к построению сетевого трафика, учитывая при этом продолжительность операций и правила построения графика, а также проверяя, чтобы вводимые фиктивные операции не влияли на непосредственно следующие. Если считать, что каждая операция начинается в наиболее ранний срок, то возможный вариант сетевого графика для рассматриваемого примера имеет вид, представленный на рис.1.

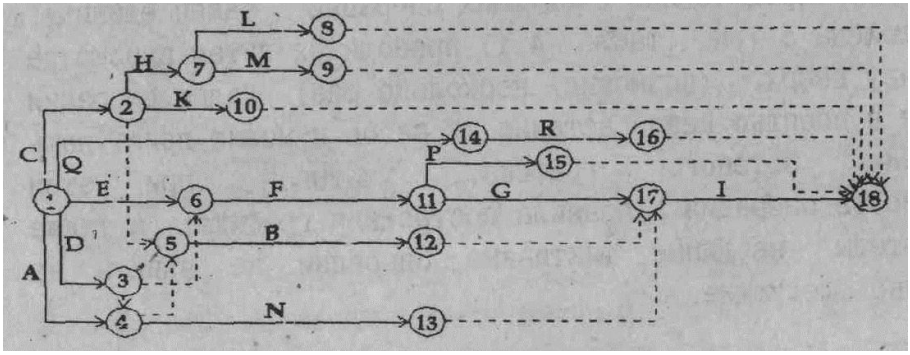

Рис. 1. Пример сетевого графика

Построение сети – это лишь первый шаг для получения календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой операция. Для выявления критических путей и резервов времени необходимо проделать специальные расчеты.

Согласно определению, операция считается *критической*, если задержка ее начала приводит к увеличению срока окончания всего плана. Для критической операции промежуток времени между ранним началом и поздним окончанием равен ее фактической продолжительности, в отличие от некритических операций, которые имеют *резерв времени*. *Критический путь* является непрерывной цепочкой критических операций. Метод его определения проиллюстрируем на числовом примере.

Пусть для некоторой задачи был построен сетевой график (рис. 2).

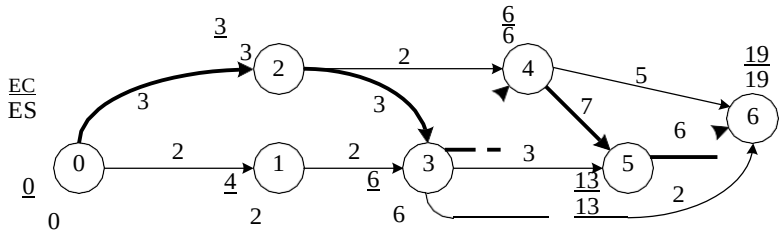

Рис. 2. Сетевой график и критический путь

Исходное событие – 0, конечное событие – 6. Продолжительность каждой операции D_{ij} указана на ориентированных ребрах графа. Расчет критического пути производится при прямом и обратном ходе. Двигаясь от исходного к завершающему событию, вычисляем ранний срок наступления событий (он указан рядом с событием под дробной чертой). Затем, двигаясь от завершающего события к исходному (обратный ход), вычисляем поздний срок наступления события (он указан над дробной чертой).

Рассмотрим вначале процедуру прямого хода. Обозначим через ES ранний срок начала всех операций, выходящих из события i. Иными словами, ES_i является также ранним сроком наступления i-го события. Если i = 0, то $ES_0 = 0$. В общем случае, имеем:

$$ES_i = \max_j \{ES_j + D_{ij}\},$$

т.е. чтобы вычислить ES_i для некоторого события i, необходимо сначала определить все ES_j начальных событий для операций (i, j), входящих в событие j. В частности, для сети на рис. 70 имеем:

$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0+2 = 2,$

$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0+3 = 3,$

$ES_3 = \max_{i = 1,2}\{ESi + D_{13}) = \max(2+2 ; 3+3\} = 6,$

$ES_4 = \max_{i=2,3}\{ESi + D_{14}\} = \max\{3+2 ; 6+0) = 6,$

$ES_5 = \max_{i = 3,4}\{ESi + D_{15}\} = \max\{6+7 ; 6+3\} = 13,$

$ES_6 = \max_{i=3,4,5}\{ESi + D_{16}) = \max\{6+2 ; 6+5 ; 13+6\} = 19.$

Обозначим через LC_i поздний срой окончания всех операций, входящих в событие i. При i = n имеем $LC_n = ES_n$ – это отправная точка для обратного хода. В общем случае, имеем:

$$LC_i = \min_j \{LC_j - D_{ij}\},$$

т.е., чтобы вычислить LC_i для некоторого события i, необходимо сначала определить все LC_j конечных событий для операций (i, j), выходящих из события i. В частности, для сети (см. рис. 70) имеем:

$$LC_6 = ES_6 = 19;\ LC_5 = LC_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13,$$

$$LC_4 = \min_{j=5,6}\{LC_j - D_{4j}\} = \min\{13-7\ ;\ 19-5\} = 6,$$

$$LC_3 = \min_{j=4,5,6}\{LC_j - D_{3j}\} = \min\{6-0\ ;\ 13-3\ ;\ 19-2\} = 5,$$

$$LC_2 = \min_{j=3,4}\{LC_j - D_{2j}\} = \min\{6-3\ ;\ 6-2\} = 3,$$

$$LC_1 = LC_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4,$$

$$LC_0 = \min_{j=1,2}\{LC_j - D_{0j}) = \min\{4-2\ ;\ 3-3\} = 0.$$

Операция (i, j) принадлежит критическому пути, если

$ES_1 = LC_i$,

$ES_j = LC_j$,

$ES_j - ES_j = LC_j - LC_i = D_{ij}$,

т.е. нет резерва времени для ее выполнения. Иными словами, для критических операций ранний срок наступления события i совпадает с поздним сроком наступления этого же события и то же самое можно сказать относительно события j. Разность между ранними сроками (или поздними сроками) наступления событий i, j равна продолжительности операции (i, j). Для рассмотренного примера сетевого графика (см. рис. 2) критический путь включает операции **(0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)** и определяет кратчайшую продолжительность плана в целом, являясь непрерывной цепочкой операций.

Для критических операций резерв времени равен нулю. Чтобы определить резерв времени некритических операций введем следующие определения:

Срок позднего начала операций (i, j) равен

$LS_{i,j} = LC_j - D_{ij}$.

Срок раннего окончания операции (i, j) равен

$EC_{ij} = ES_i + D_{ij}$.

Полный резерв времени (TF) операции (i, j) равен разности между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция:

$TF_{i,j} = (LC_j - ES_i) - D_{i,j} = LC_j - EC_{i,j} = LS_{i,j} - ES_i$.

Свободней резерв времени определяется при условии, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии свободный резерв (FF) операции (i, j) равен

$$FF_{i,j} = (ES_j - ES_i) - D_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени для сетевого графика, представленного на рис. 2, сведем в таблицу:

(i,j)	D_{ij}	Раннее		Позднее		TF_{ij}	FF_{ij}
		начало ES_i	окончание EC_{ij}	начало LS_{ij}	окончание LC_j		
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	0	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	0*	0
(2.4)	2	3	5	4	6	1	1
(3,4)	0	6	6	6	6	0*	0
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	0*	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	0*	0

Отметим, что если полный резерв операции $TF_{i,j}$ равен нулю (критическая операция, помечена в таблице знаком *), то свободный резерв $FF_{i,j}$ также равен нулю (обратное – неверно).

Рассмотрим теперь задачу стратегического планирования и метод МАИ для ее решения. Напоминаем, что МАИ включает следующие этапы.

1. Формулирование задачи и определение цели плана.

2. Построение иерархии: цель → критерии → альтернативы.

3. Построение множества матриц парных сравнений (критериев, альтернатив и т.п.), уточнение шкалы сравнения.

4. Вычисление векторов приоритетов, индексов согласованности (ИС) и отношений согласованности (ОС). Повторение пп. 3, 4 метода для всех уровней иерархии.

5. Иерархический синтез всей иерархии.

Сформулируем задачу и определим цель плана на примере следующей задачи планирования.

Задача 2. Семья решила купить дом (цель плана). Обсудив, определили 8 критериев, которым должен удовлетворять дом:

- $К_1$ – размеры дома (жилая и общая площади, число комнат);
- $К_2$ – транспортные удобства;
- $К_3$ – окрестности (безопасность, вид, экология);
- $К_4$ – год постройки дома;
- $К_5$ – двор;
- $К_6$ – оборудованность дома;
- $К_7$ – потребность в ремонте;
- $К_8$ – стоимость и условия продажи.

Задача заключается в выборе и покупке одного из трех альтернативных домов: А, Б или В.

Построим вначале иерархию задачи: цель – критерии – альтернативы (рис. 3).

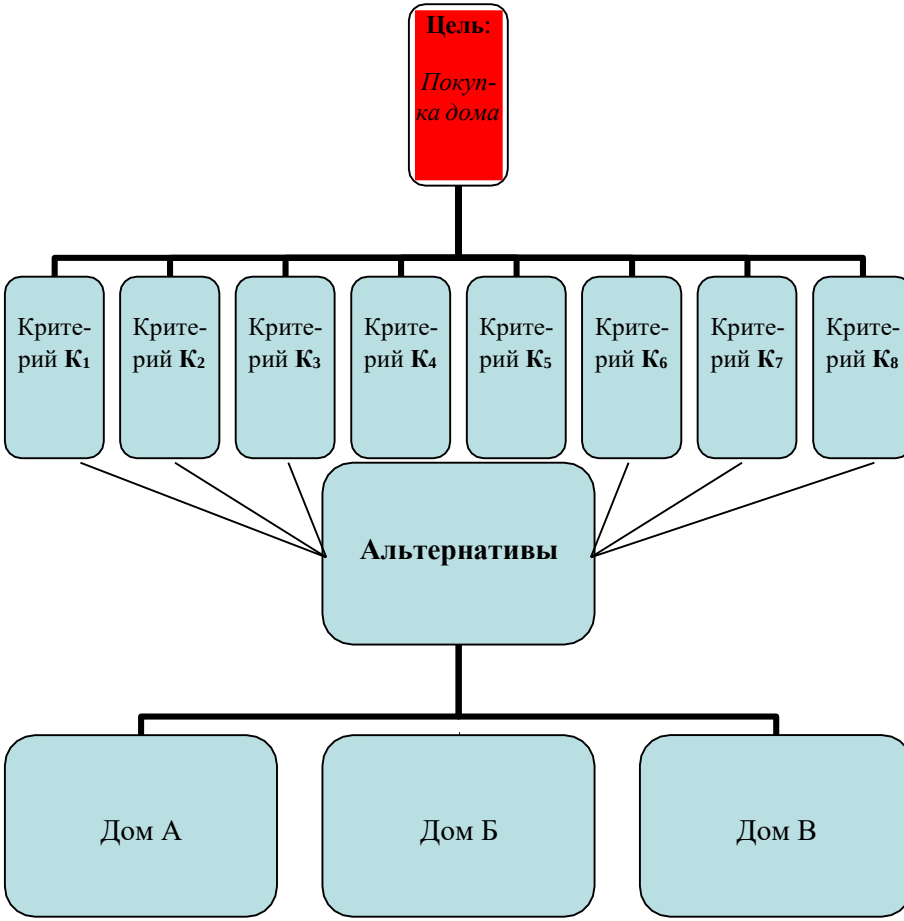

Рис. 3. Иерархическое дерево задачи

Построим множество матриц парных сравнений критериев и альтернатив, используя 9-балльную шкалу сравнения. Все матрицы должны обладать свойством обратной симметричности, т.е. $a_{ji}=1/a_{ji}$, где j – номер столбца, i – номер строки.

Вначале необходимо построить одну матрицу размером 8×8, попарно сравнив восемь критериев между собой по отношению к цели, взяв за основу выработанные семьей экспертные оценки.

Пусть эти оценки выражаются следующей матрицей:

Цель	К1	К2	К3	К4	К5	К6	К7	К8
К1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
К2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
К3	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
К4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
К5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
К6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
К7	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
К8	4	7	5	8	6	6	2	1

Для построения восьми матриц размером 3×3 необходимо иметь детальное описание каждой альтернативы. Приведем в качестве примера краткое описание альтернативных вариантов дома.

Дом А. Большой, с хорошими окрестностями. Двор больше, чем у домов Б и В, необходим основательный ремонт. Дорогой.

Дом Б. Размеры меньше, чем у дома А. Расположен вдали от остановок общественного транспорта. Не полностью оборудован, но в отличном состоянии и дешевый.

Дом В. Небольшой, в хорошем состоянии, рядом парк. Двор средний по размерам. Недорогой, но и не дешёвый.

Семья попарно сравнила три альтенативных варианта дома по отношению к каждому из восьми критериев. В результате опроса мнений были получены следующие матрицы:

$К_1$	А	Б	В	$К_2$	А	Б	В	$К_3$	А	Б	В	$К_4$	А	Б	В
А	1	6	8	А	1	7	1/5	А	1	8	6	А	1	1	1
Б	1/6	1	4	Б	1/7	1	4	Б	1/8	1	1/4	Б	1	1	1
В	1/8	1/4	1	В	5	1/4	1	В	1/6	4	1	В	1	1	1
$К_5$	А	Б	В	$К_6$	А	Б	В	$К_7$	А	Б	В	$К_8$	А	Б	В
А	1	5	4	А	1	8	6	А	1	1/2	1/2	А	1	1/7	1/5
Б	1/5	1	1/3	Б	1/8	1	1/5	Б	2	1	1	Б	7	1	3
В	1/4	3	1	В	1/6	5	1	В	2	1	1	В	5	1/3	1

Из сформированных матриц парных сравнений определим векторы локальных приоритетов, которые отражают влияние элементов нижних уровней иерархии на элементы верхних уровней. Для этого необходимо вычислить собственный вектор каждой из

матриц, а затем нормализовать их к единице. Это и будет вектор локальных приоритетов.

Воспользуемся для вычисления вектора собственных значений приближенным методом среднего геометрического. Согласно этому методу вычисление собственных значений матрицы размером (n×n) заменяется вычислением среднего геометрического в каждой строке матрицы путем перемножения всех элементов строки и извлечения из произведения корня n-й степени. Полученный таким образом вектор собственных значений нормализуется к единице путем деления каждого собственного значения на сумму всех чисел вектора собственных значений. Это позволяет определить "вес" приоритета.

Для матрицы критериев после вычислений получаем вектор локальных приоритетов критериев: (0,173; 0,054; 0,188; 0,018; 0,031; 0,036; 0,167; 0,333). Как интерпретировать эти локальные приоритеты? – Критерий $К_8$ (стоимость и условия продажи дома) равен 0,333, т.е. этот критерий является наиболее весомым. Он в два раза важнее значения критерия размера дома (0,173) и намного важнее года постройки (0,018). Вообще говоря, после этого можно сократить число критериев до трех или четырех, выбрав наиболее приоритетные из них. Для этого необходимо найти сумму критериев и вновь нормализовать сокращенный вектор к единице. Однако, решая вопрос об исключении каких-то критериев после первых вычислений, следует быть предельно осторожным. Для рассматриваемого примера сохраним все критерии.

Для восьми матриц альтернатив после вычислений получаем векторы: (0,754; 0,181; 0,065), (0,233; 0,005; 0,713), (0,745; 0,065; 0,181), (0,333; 0,333; 0,333), (0,674; 0,101; 0,226), (0,747; 0,060; 0,193), (0,2; 0,4; 0,4), (0,072; 0,650; 0,278).

Далее для каждой матрицы необходимо вычислить индекс согласованности (ИС): вначале суммируются элементы каждого столбца матрицы парных сравнений, затем сумма j-го столбца умножается на j-й элемент нормализованного вектора локальных приоритетов, наконец, все полученные n чисел суммируются. Если

полученную сумму обозначить через h_{max}, то ИС = (h_{max} – n) / (n – 1). Например, для 8 матриц альтернатив значения h_{max} соответственно равны: 3,136; 3,247; 3,133; 3,0; 3,086; 3,197; 3,0; 3, 065. Проверяем выполнение свойства обратно симметричных матриц: $h_{max} \geq 3$. Видно, что оно выполняется. Тогда значения индексов согласованности для 8 матриц альтернатив соответственно равны: 0,068; 0,124; 0,068; 0,0; 0,043; 0,099; 0,0; 0,032.

Вычислим отношение согласованности (ОС) в полученных матрицах по формуле

$$ОС = ИС/ИС_{сл} \times 100\ \%.$$

Значения индекса случайной согласованности $ИС_{сл}$ выбираем из таблицы:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ИС_{сл}$	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Например, значения ОС для 8 матриц альтернатив соответственно равны: 11,7 %; 21,3 %; 11,7 %; 0 %; 7,4 %; 17 %; 0 %; 5,6 %. Приемлемым считается значение ОС около 10 %, допустимым значением – 20 %. Таким образом, значение ОС при сравнении альтернативных решений по критерию $К_2$ оказалось несколько хуже допустимого уровня согласованности. Это означает желательность пересмотра соответствующей матрицы с целью добиться большей согласованности в экспертных оценках. Однако семья не стала пересматривать данную матрицу парных сравнений.

Переходим к заключительному этапу МАИ – иерархическому синтезу приоритетов, начиная с верхних уровней в направлении к нижним уровням. Для этого необходимо сформировать вектор глобального приоритета. Элементы этого вектора получают путем умножения локальных приоритетов низшего уровня на приоритет критерия соседнего верхнего уровня иерархии с последующим суммированием полученных произведений по всем критериям. В результате получаем значение глобального приоритета по каждой из альтернатив. В таблице представлены результаты расчетов:

Критерии	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$	$К_5$	$К_6$	$К_7$	$К_8$	Глобальный приоритет
Приоритет критериев	0,173	0,054	0,188	0,018	0,031	0,036	0,167	0,333	
А	0,754	0,233	0,745	0,333	0,674	0,747	0,2	0,072	**0,396**
Б	0,181	0,005	0,065	0,333	0,101	0,06	0,4	0,65	0,341
В	0,065	0,713	0,181	0,333	0,226	0,193	0,4	0,278	0,263
h_{max}	3,136	3,247	3,133	3,0	3,086	3,197	3,0	3,065	
ИС	0,068	0,124	0,068	0,0	0,043	0,099	0,0	0,032	
ОС	0,117	0,213	0,117	0,0	0,074	0,170	0,0	0,056	

Например, глобальный приоритет для дома А вычисляется по следующей формуле:

0,754×0,173 + 0,233×0,054 + 0,745×0,188 +0,333×0,018 +0,674×0,031 + + 0,747×0,036 +0,2×0,167 + 0,072×0,333 = 0,396.

Таким образом, с небольшим перевесом «победителем» стал дом А, который является наименее желательным с финансовой точки зрения. Это неочевидное решение объясняется тем, что дом А превосходит остальные альтернативы по четырем из восьми критериев.

Список литературы

Основная литература

1. Микони С.В. Теория и практика рационального выбора: Монография. – М.: Маршрут, 2004.

2. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учебное пособие. – М.: Выс. школа, 1998.

4. Родзин С.И. Руководство для самостоятельной работы, контрольные вопросы, индивидуальные задания по курсу «Теория принятия решений». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1996.

Дополнительная литература

5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр: Учебное пособие. – М.: РХД, 2007.

6. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Едиториал УРСС, 2007.

7. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

8. Шикин Е.В. Исследование операций: Учебник. – М.: ТК Велби, Проспект, 2006.