УДК 539.3:534.1 DOI: 10.34708/GSTOU.CONF.2020.71.23.033

ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА И ГРУНТА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ УГЛЕ ПАДЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Исраилов М.Ш.[1],
Даурбеков С.С.[2],
Хадисов М-Р. Б.[2]
[1]КНИИ им. Х.И. Ибрагимова РАН, г. Грозный
[2]ГГНТУ им. акад. М.Д. Миллионщикова, г. Грозный

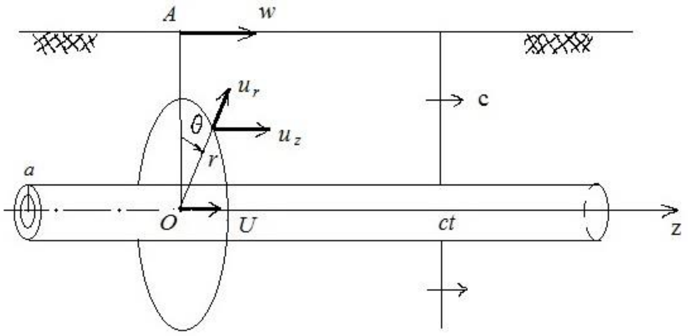
Даны постановки связанных задач о совместных колебаниях подземного трубопровода и упругого грунта, включая случай наклонного падения сейсмической волны на трубопровод. Получены точные решения внешних задач об установившихся колебаниях грунта в рамках предложенного ранее приближения «квазиодномерной» деформации. Принципиальная значимость найденных в замкнутой аналитической форме решений состоит в том, что они позволяют в каждом случае выписать уравнение совместных с грунтом продольных колебаний трубопровода в явном виде.

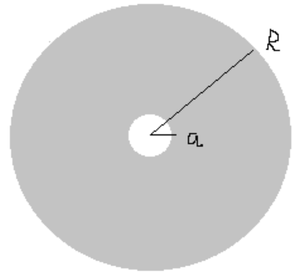
Ключевые слова: подземный трубопровод, сейсмические колебания, связанная постановка, метод квазиодномерной деформации.

1. Постановка связанной задачи в случае сейсмической волны, распространяющейся вдоль трубопровода. Прямолинейный трубопровод рассматривается как бесконечно длинный толстостенный цилиндр (стержень) внешнего радиуса a. Движение трубопровода и упругого грунта вызвано распространением продольной сейсмической волны в направлении оси трубопровода, принимаемой за ось Oz цилиндрической системы координат (r,θ,z). Сказанное означает, что на расстоянии $r=R$, достаточно удаленном от трубопровода, перемещения среды $\mathbf{u}(u_r,u_\theta,u_z)$ равны перемещениям в падающей волне, т. е.

$$u_r\big|_{r=R}=0,\; u_\theta\big|_{r=R}=0,\; u_z\big|_{r=R}=w(z-ct). \qquad (1)$$

В качестве "удаленного" радиуса R можно принять глубину залегания трубопровода OA (Фиг. 1); тогда w есть измеренные на поверхности земли перемещения в направлении оси трубопровода, а условия (1) означают, что граничные условия сносятся с поверхности земли на коаксиальную трубе цилиндрическую поверхность радиуса R.





Фиг. 1

Граничные условия на поверхности контакта трубопровода и грунта берутся в следующем виде

$$u_r\big|_{r=a} = 0\,,\; u_\theta\big|_{r=a} = 0\,,\; u_z\big|_{r=a} = U(z,t)\,, \tag{2}$$

где $U(z,t)$ означает осевое перемещение трубопровода, определяемое из уравнения продольных колебаний стержня. Физически условия (2) выражают требование прилипания на поверхности контакта грунта и трубопровода, когда в решении внешней задачи для грунта (задачи определения сил взаимодействия) пренебрегается влиянием изменения размеров поперечных сечений трубопровода при его продольных деформациях (первое условие в (2)). Второе условие в (2) выражает факт невозможности возбуждения крутильных движений (колебаний) сечений кругового цилиндра при взаимодействии его с плоскими волнами.

В случае продольной падающей волны (1) со скоростью распространения $c = c_1 \equiv \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ (где λ, μ – константы Ламе упругого грунта и ρ – его плотность), задача для среды является осесимметричной, т. е. в ней $u_\theta \equiv 0$, а перемещения u_r и u_z не зависят от угловой координаты θ и удовлетворяют следующим уравнениям движения упругой среды [1] (уравнениям Ламе) для осесимметричного случая

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r}\right) + \mu\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} = \rho\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \dfrac{\mu}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right) = \rho\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3}$$

Теперь, для окончательной формулировки связанной задачи о совместных движениях (колебаниях) трубопровода и упругого грунта, достаточно к уравнениям (3) и граничным условиям (1), (2) присоединить уравнение вынужденных продольных колебаний трубопровода, рассматриваемого как упругий стержень плотности ρ' с модулем Юнга E':

$$\rho'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E'\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{S}F_\tau(z,t)\,. \tag{4}$$

С учетом того, что труба вовлекается в движение за счет касательных напряжений, действующих на ее поверхности, за объемную силу F в уравнении (4) принята поверхностная сила

$$F_{\tau}(z,t)=\int_{0}^{2\pi}\left(\sigma_{rz}\right)\Big|_{r=a}ad\theta\,, \qquad (5)$$

приходящееся на единицу объема стержня, т. е. сила $F=F_{\tau}\cdot dz/V=F_{\tau}\cdot dz/(S\cdot dz)=F_{\tau}/S$, где V – объем элемента трубы длины dz, а $S=\pi(a^2-b^2)$ есть площадь поперечного сечения трубы.

Принципиально важно в дальнейшем, что касательное напряжение на поверхности контакта грунта и трубопровода, определяющее силу F_{τ} выражением (5), дается формулой

$$\sigma_{rz}\big|_{r=a}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a}, \qquad (6)$$

если операции взятия производной по z и предельного перехода по r взаимно перестановочны (что предполагается), и оно зависит, тем самым, только от продольного перемещения точек грунта.

Очевидно, что в зависимости от того, является ли трубопровод конечным (конечной длины), полубесконечным или бесконечным, приведенная выше формулировка должна быть дополнена условиями «закрепления» на концах или на бесконечности.

2. Постановка связанной задачи в случае плоской сейсмической волны, падающей под произвольным углом на трубопровод. В случае наклонного падения волны на трубопровод вектор перемещений в волне раскладывается на составляющую, параллельную оси трубопровода, и составляющую, перпендикулярную к ней. Тогда падающая плоская волна может рассматривается как сумма двух плоских волн, распространяющихся вдоль дневной поверхности земли $(r=R)$ в направлении оси трубы со скоростью c, равной $c_1/\sin\alpha$ или $c_2/\sin\alpha$ в зависимости от того, является ли исходная сейсмическая волна продольной или поперечной (сдвиговой) со скоростью распространения $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$. Здесь α угол, образуемый фронтом падающей плоской волны с осью трубопровода. Поэтому, в при наклонном падении $c\neq c_1$ и возможны случаи, когда $c_2<c<c_1$ и $c>c_1$.

Взаимодействие трубопровода и волны, представляющей второе слагаемое в указанном выше разложении падающей волны, с перемещениями в поперечном направлении к трубе приводит либо к совместным со средой поперечным движениям трубопровода (без изгиба), либо к его изгибным колебаниям. Такая задача может быть исследована отдельно (см., например, [2]) и здесь не рассматривается.

Когда глубина залегания значительно превышает диаметр трубы, то и при наклонном падении можно считать продольные смещения на поверхности $r=R$ приблизительно одинаковыми, т. е. считать функцию w не зависящей от угла θ. Тогда внешняя задача для упругого грунта , как и в случае $c = c_1$, является осесимметричной ($u_\theta \equiv 0$) и сводится к нахождению решения системы (3). Однако существуют ситуации, когда при снесении граничных условий на цилиндрическую поверхность ($r = R$), коаксиальную поверхности трубчатого подземного сооружения, перемещения w в (1) должны рассматриваться как функции угла θ. Сказанное имеет место, например, когда трубчатое сооружение большого диаметра (скажем туннель метрополитена) залегает на небольшой глубине и когда при наклонном падении сейсмической волны в слое грунта, лежащем над сооружением, возникают многократно отраженные волны от поверхности сооружения и границы полупространства (поверхности Земли). В этих случаях задача сводится к интегрированию трех уравнений Ламе [1] для трех компонент вектора смещений упругой среды при граничных условиях (1), (2) и она может решаться методом Фурье, разлагая заданную $w(z - ct, \theta)$ и неизвестные функции в ряды по θ (учитывая, что продольное перемещение сечения стержня U не зависит от θ).

При этом легко устанавливается следующий важный факт: *на погонную результирующую силу (5), действующую на трубопровод (на его элемент единичной длины) и приводящую трубопровод в движение, не влияют коэффициенты разложений компонент перемещений грунта в ряды Фурье (коэффициенты при* $\cos n\theta$ *и* $\sin n\theta$) *для* $n \geq 1$, *т. е. эта результирующая сила (вычисляемая как интеграл по боковой поверхности элемента трубы от касательных напряжений* σ_{rz}) *полностью определяется первыми коэффициентами* (*для* $n = 0$) *рядов Фурье компонент вектора перемещений грунта.*

В соответствии с выражением (6) для касательных напряжений на поверхности трубы, для нахождения указанной результирующей силы необходимо знать лишь первый член $u_z^{(0)}(r,t)$ разложения в ряд Фурье продольного перемещения среды $u_z(r,\theta,t)$, но он не может быть определен независимо, поскольку в уравнения Ламе (для первых коэффициентов рядов) входят $u_r^{(0)}(r,t)$ и $u_\theta^{(0)}(r,t)$ – коэффициенты рядов Фурье двух других компонент вектора перемещений среды. Однако, дифференциальные уравнения Ламе для этих трех функций распадаются на систему двух уравнений относительно $u_r^{(0)}$ и $u_z^{(0)}$, в точности совпадающую с (3), и отдельное волновое уравнение для $u_\theta^{(0)}$, из которого, в силу однородных граничных условий (1) и (2) для $u_\theta^{(0)}$, следует, что $u_\theta^{(0)} \equiv 0$.

Следовательно, и в неосесимметричном случае задача сводится к системе (3) (относительно функций $u_z^{(0)}$ и $u_r^{(0)}$), только в граничном условии (1) для $u_z^{(0)}$ необходимо $w(\theta)$ заменить на среднее значение (первый коэффициент ряда Фурье) $\overline{w} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} w(\theta) d\theta$ или, иначе, граничное условие на поверхности

$r = R$ достаточно задать в интегральном виде (например, как среднее арифметическое значений w в дискретном наборе точек окружности радиуса R).

3. Метод «квазиодномерной» деформации и аналитические решения внешних задач для грунта в случае стационарных колебаний. В сформулированной выше связанной задаче сейсмодинамики трубчатого сооружения или трубопровода движение сооружения зависит от процессов, происходящих в грунте через силу «взаимодействия» (5), для вычисления которой по соотношениям (6) необходимо знать движение грунта. Решение этой «внешней» задачи для грунта, сводящейся к системе (3) и граничным условиям (1), (2), представляет основную трудность в исследовании движения и напряженно-деформированного состояния подземного сооружения при сейсмическом воздействии в точной постановке.

Трудности математического характера в решении этой задачи и желание иметь ее аналитическое решение при произвольной функции U в граничном условии (2) (тогда сила F_τ может быть аналитически выражена через U и w ($F_\tau = F_\tau(z,t;U,w)$) и получен явный вид уравнения колебаний трубы (4) относительно функции $U(z,t)$) побудили искать физически приемлемое упрощение задачи для грунта.

Как показано М.Ш. Исраиловым [3,4], существенное упрощение сформулированной задачи получается в предположении, что для описываемого движения грунта продольные деформации ε_{zz} (в направлении движения частиц среды в сейсмической волне) *являются преобладающими* и деформациями ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$ можно пренебречь в сравнении с ε_{zz}, т. е. когда для тензора деформаций грунта можно принять приближенное равенство:

$$(\mathrm{E}) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & \varepsilon_{rz} \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ \varepsilon_{zr} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{zr} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тогда во втором уравнении системы (3) слагаемым, содержащим u_r, можно пренебречь и оно выделяется в отдельное уравнение для осевых перемещений грунта

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{8}$$

в то время как первое уравнение системы (3) будет, по-прежнему, содержать оба перемещения u_r и u_z. Уравнение (8) в совокупности с граничными условиями из (1), (2), относящимися к u_z, приводит к отдельной краевой задаче относительно продольных перемещений в грунте, решение которой, в соответствии с выражением (6), достаточно для определения касательных напряжений на поверхности трубопровода и вычисления силы взаимодействия по формуле (5).

Обоснование применимости метода и решение внешней задачи для грунта продемонстрируем на примере стационарных (установившихся по времени) колебаний грунта и бесконечного трубопровода. А именно, рассматриваются установившиеся колебания грунта и трубопровода, когда заданное сейсмическое колебание вдали от трубопровода представляется в виде

$$w(z-ct) = w_0 e^{ik(z-ct)} = w_0 e^{i(kz-\omega t)}, \tag{9}$$

где ω – частота сейсмических колебаний, а $k = \omega / c$ есть волновое число. Тогда перемещения грунта и трубопровода представляются в аналогичной форме: $(u_r, u_\theta, u_z) = (U_r, U_\theta, U_z) e^{ik(z-ct)}$, $U = U_0 e^{ik(z-ct)}$ и уравнения (3), (4) сводятся, соответственно, к обыкновенным дифференциальным уравнениям для амплитудных функций U_r, U_z и U_0. При этом в выражениях (6), (5) для касательного напряжения на поверхности трубы и силы взаимодействия трубопровода с грунтом также выделяется множитель $\exp[ik(z-ct)]$ и очевидны их записи через амплитудные функции.

В рассматриваемом случае стационарных колебаний приближение (7), выражающее «квазиодномерность» тензора деформации Е , обеспечивается, если $|dU_r / dr| \ll |U_z| / \lambda$ и $|U_r / r| \ll |U_z| / \lambda$, где $\lambda = 2\pi / k$ – длина падающей сейсмической волны.

Для амплитудной функции U_z уравнение (8) сводится к уравнению

$$\frac{d^2 U_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_z}{dr} \pm p^2 U_z = 0,\ p \equiv \frac{k}{c_2}\sqrt{\left|c^2 - c_1^2\right|}, \tag{10}$$

в котором знак плюс берется в случае *a*) $c > c_1$ и знак минус в случае *b*) $c_2 < c < c_1$.

К уравнению (10) надо присоединить краевые условия из (1), (2), относящиеся к U_z (и записанные с учетом того, что в них зависимость всех функций от z и t определена в рассматриваемом случае установившихся колебаний множителем $\exp[ik(z-ct)]$ в соответствии с (9)).

Решение краевой задачи для U_z достаточно для определения касательных напряжений $\sigma_{rz} = \sigma_{rz}^0 \exp[ik(z-ct)]$ на поверхности трубопровода ввиду равенства

$$\left(\sigma_{rz}^0\right)\Big|_{r=a} = \mu\left(ikU_r + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \mu\left(\frac{dU_z}{dr}\right)\Big|_{r=a},$$

следующего из (6).

Когда падающая продольная сейсмическая волна распространяется вдоль трубопровода, то в уравнении (10) $c = c_1$, $p = 0$ и решение краевой задачи (10), (1), (2) имеет наиболее простой вид, а именно

$$U_z = \frac{\ln(r/a)}{\ln(R/a)}\left(w_0 - U\right) + U,\ \frac{dU_z}{dr} = \frac{1}{r\ln(R/a)}\left(w_0 - U\right). \tag{11}$$

В случае наклонного падения сейсмической волны на трубопровод (тогда $c \neq c_1$) решение названной краевой задачи также находится в явном аналитическом виде и записывается в случаях *a*) и *b*) через бесселевы функции соотношениями:

$$a)\ U_z = \frac{J_0(pr)}{\Delta_1}\left\{Y_0(pR)U - Y_0(pa)w_0\right\} - \frac{Y_0(pr)}{\Delta_1}\left\{J_0(pR)U - J_0(pa)w_0\right\}, \quad (12)$$

$$\Delta_1 \equiv J_0(pa)Y_0(pR) - Y_0(pa)J_0(pR);$$

$$b)\ U_z = \frac{I_0(pr)}{\Delta_2}\left\{K_0(pR)U - K_0(pa)w_0\right\} - \frac{K_0(pr)}{\Delta_2}\left\{I_0(pR)U - I_0(pa)w_0\right\}, \quad (13)$$

$$\Delta_2 \equiv I_0(pa)K_0(pR) - K_0(pa)I_0(pR).$$

Здесь J_0, Y_0 означают функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Аналитические решения (12), (13) позволяют в явном виде выписать уравнение продольных колебаний трубопровода при наклонном падении сейсмической волны, так же, как и решение (11) в случае сейсмической волны, бегущей в направлении трубопровода.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00024.

Список литературы

1. А. Ляв. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР. 1935. 674 с.
2. Toki K., Takada S. Earthquake response analysis of underground tubular structure // Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute. Kyoto Univ. 1974. V. 24, Part 2, No. 221. P. 107-125.
3. Israilov M.Sh. Seismodynamics of an underground pipeline // Proc. of the 15-th World Conf. on Earthq. Engng., Lissabon, Portugal, 2012. P. 2125.
4. Георгиевский Д.В., Исраилов М.Ш. Сейсмодинамика протяженных подземных сооружений и грунтов: постановки задач и автомодельные решения // Изв. РАН. Механика твердого тела (МТТ). 2015, № 4. С. 138-151.